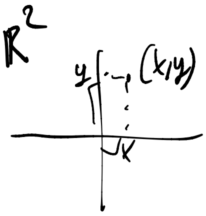
Spazi topologici

X insieme di "punti", con una nozione di CONTINUITÀ

↳ Esempi base! Il piano: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$

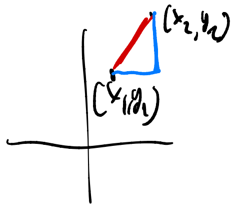
Elementi sono coppie (x,y) con $x,y\in\mathbb{R}$



Sul piano, possiamo MISURARE DISTANZE!

Dati (x_1,y_1), (x_2,y_2) punti del piano,

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$



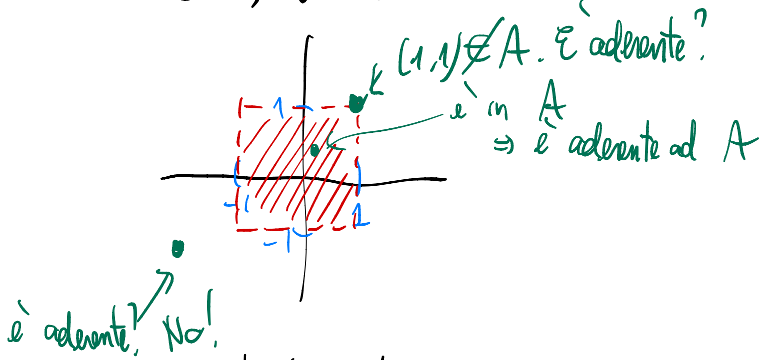
ADERENZA di un punto ad un certo sottoinsieme del piano.

Def: sia $A\subseteq\mathbb{R}^2$. Sia $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Diciamo che (x,y) è ADERENTE ad A se è "arbitrariamente vicino" ad un qualche punto di A

"Arbitrariamente vicino" $\equiv$ $\forall\varepsilon>0$, ($\varepsilon<\frac{1}{1000}$) $\exists\,(x',y')\in A$ t.c. $d((x,y),(x',y'))<\varepsilon$

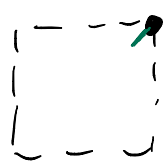
Esempio: $A=(-1,1)\times(-1,1)\subseteq\mathbb{R}^2$.



D: $(1,1)$ è aderente? Intuitivamente, sì:

Proviamo a dimostrarlo!

Fisso $\varepsilon>0$, con $\varepsilon<1$



Considero il punto $(1-\varepsilon,1-\varepsilon)\in A$

Calcolo: $d((1,1),(1-\varepsilon,1-\varepsilon))$

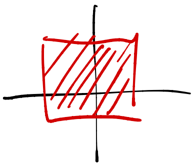
(

$$= \sqrt{(1-1+\varepsilon)^2 + (1-1+\varepsilon)^2}$$

$$= \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\,\varepsilon < 2\varepsilon$$

<u>Esercizio</u>: in realtà funziona!
Effettivamente, $(1,1)$ è ADERENTE ad A

Possiamo dimostrare: l'insieme dei punti aderenti ad A è il "quadrato chiuso" $[-1,1] \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$



<u>Notazione</u>: $\overline{A} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \underline{x} \text{ è aderente ad } A \}$

"Chiusura di A"

<u>Def</u>: una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è <u>continua</u> se "preserva l'aderenza":
Cioè, se per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, vale:

$$\boxed{x \text{ è aderente ad } A \Rightarrow f(x) \text{ è aderente a } f(A)}$$

$f(A) = \{$ i punti y della forma $f(x)$ per qualche $x \in A \}$

(M. Manetti, "Topologia")

X insieme $\rightsquigarrow$ <u>nozione di 'aderenza'</u>

$A \subseteq X \longmapsto \overline{A} \subseteq X$, $\overline{A} = \{$punti aderenti ad $A\}$

"Regole":

- $x \in A$, x è aderente ad A: $\boxed{A \subseteq \overline{A}}$
- $\overline{A}$ è in qualche senso la CHIUSURA di A.
  $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$
- $A, B \subseteq X$: x aderente a $A \cup B$ $\Leftrightarrow$ x aderente ad A oppure x aderente a B : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\emptyset \subseteq X$: $\overline{\emptyset} = \emptyset$

<u>Def</u>: uno <u>spazio topologico</u> è il dato di:
un insieme X, e una funzione
$A \mapsto \overline{A}$, definita sull'insieme dei sottoinsiemi di X, e a valori
tale che valgono le "regole" scritte sopra.

<u>Esempi</u>:
- X un insieme qualsiasi.

Ci sono <u>sempre</u> almeno <u>due</u> scelte possibili di TOPOLOGIA su X

I) Definisco $\overline{A} = A$ per ogni $A \subseteq X$
(TOPOLOGIA DISCRETA su X)

II) Definisco $\overline{A} = X$ per ogni $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$
(TOPOLOGIA INDISCRETA o BANALE)

III) Nel caso $X = \mathbb{R}^2$ (ma anche, analogamente, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{R}^N, \dots$), definisco
$A \mapsto \overline{A}$ come visto in precedenza.
(TOPOLOGIA EUCLIDEA)

<u>Definizione</u>: siano X e Y spazi topologici
sia $f: X \to Y$ una funzione. Allora, f è
<u>continua</u> se: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ $\forall A \subseteq X$

topologia su X — $f(A) \subseteq Y$, topologia su Y

<u>Proposizione</u>: X è uno spazio topologico,
$1_X : X \to X$ è continua

- Se $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ sono funzioni continue tra spazi topologici, $g \circ f : X \to Z$ è una funzione continua.