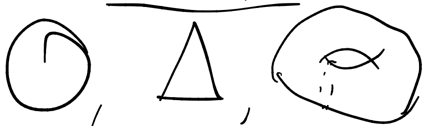
Il concetto di "spazio"

'Spazio topologico' → nozione di $\boxed{\text{CONTINUITÀ}}$

Un po' più formalmente: uno spazio topologico X è un INSIEME X munito di una TOPOLOGIA

Esempi: piano, retta,  ← toro,

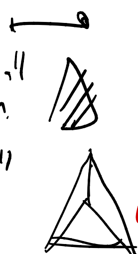
$X \rightsquigarrow$ mettere su X una 'IMPALCATURA' per capirlo meglio.

Idea base: decomporre uno spazio X in "componenti" di diverse dimensioni:

- dim 0: punti
- dim 1: "linee"
- dim 2: "triangoli"
- dim 3: "tetraedri"

⋮

- dim n: "n-simplessi"



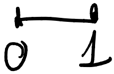
modelli

X spazio topologico

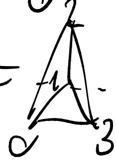
Interpretare "punti", "linee", "triangoli", "tetraedri", DENTRO X.

<u>Come?</u>

$|\Delta^0| = \bullet$

$|\Delta^1| =$ 

$|\Delta^2| =$ 

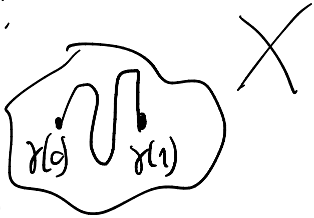
$|\Delta^3| =$ 

0) Cosa è un "punto in X"?

$$x \in X \leftrightarrow x : |\Delta^0| \to X$$

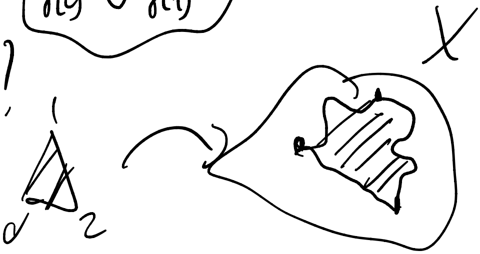
1) Cosa è una "linea" in X?

$$\gamma : |\Delta^1| \to X \text{ continua}$$



2) Cosa è un "triangolo" in X?

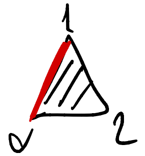
$$\alpha : |\Delta^2| \to X$$



3) " " " "tetraedro" in X

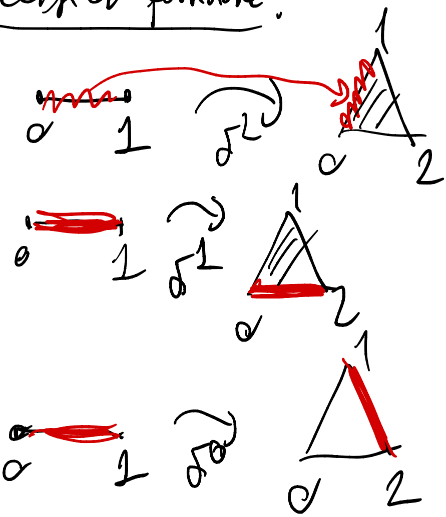
n) Un $\boxed{\underline{\text{n-simplesso in } X}}$ è una funzione continua $|\Delta^n| \to X$.

Facce:



Voglio selezionare una faccia di questo triangolo con una specifica funzione!

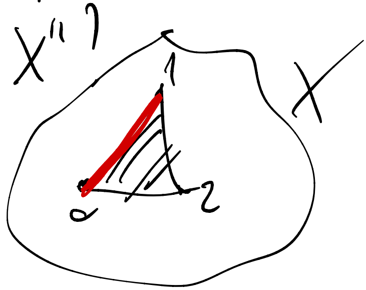
$|\Delta^1| =$



$\delta^0, \delta^1, \delta^2 : |\Delta^1| \longrightarrow |\Delta^2|$

Se adesso considero "triangoli in X"?

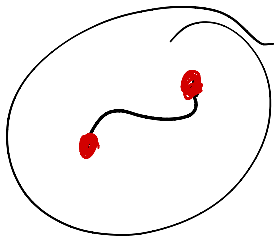
$\alpha : |\Delta^2| \longrightarrow X$



$$\begin{tikzcd} |\Delta^1| \arrow[r, "\delta^2"] \arrow[rr, bend right] & |\Delta^2| \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

—

$\gamma : |\Delta^1| \longrightarrow X$



$$\begin{tikzcd} |\Delta^0| \arrow[r, "\delta^0", "\delta^1"'] & |\Delta^1| \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} |\Delta^0| \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Dato un <u>n-simplesso in X</u> $\sigma: |\Delta^n| \to X$,

posso considerare le sue <u>FACCE</u>:

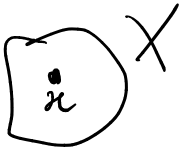
$$d_0(\sigma), \dots, d_n(\sigma) : |\Delta^{n-1}| \to X \quad ((n-1)\text{-simplessi in } X)$$

$$d_0(\sigma) : |\Delta^{n-1}| \to X :$$

$$|\Delta^{n-1}| \xrightarrow{\delta^0} |\Delta^n| \xrightarrow{\sigma} X$$ ← seleziono le facce

---

<u>Degenerazioni</u>

$x : |\Delta^0| \to X$  (punto in X)

• ← punto.

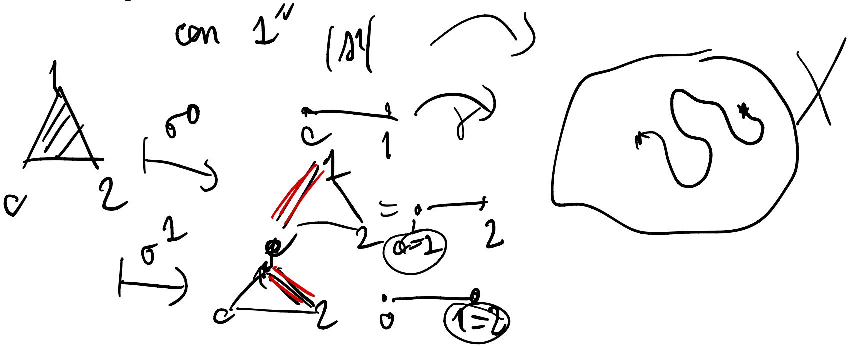
Domanda: posso vedere $x : |\Delta^0| \to X$ come un "cammino degenere" in X?

Risposta: sì: (il cammino che parte da x, STA FERMO e termina in x)

$$|\Delta^1| \xrightarrow{\sigma^0} |\Delta^0| \xrightarrow{x}$$ 

0 —— 1 $\longmapsto$ • 0 (=1)

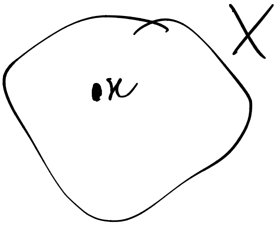
"collasso 0 con 1"



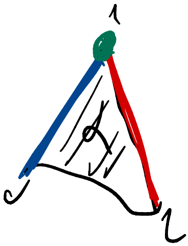
$$|\Delta^2| \overset{\sigma^0}{\underset{\sigma^1}{\rightrightarrows}} |\Delta^1| \xrightarrow{\gamma} X \qquad \boxed{\begin{array}{l} s_0(\gamma): |\Delta^2| \xrightarrow{\sigma^0} |\Delta^1| \to X \\ s_1(\gamma): |\Delta^2| \xrightarrow{\sigma^1} |\Delta^1| \to X \end{array}}$$

$$|\Delta^1| \xrightarrow{\sigma^0} |\Delta^0| \xrightarrow{x} X \qquad s_0(x): |\Delta^1| \to X$$

Osservazione:



$$d_0 s_0(x) = x$$
$$d_1 s_0(x) = x$$

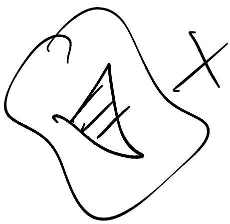


$d_0(\alpha): |\Delta^1| \to X$

$d_2(\alpha)$: Il vertice iniziale di $d_0(\alpha)$ è 1 $\quad d_1(d_0(\alpha))$

Il vertice finale di $d_2(\alpha)$ è ancora 1 : $d_0(d_2(\alpha))$

Se ho un n-simplesso in X:



$$\sigma: |\Delta^n| \to X$$
$$d_0(\sigma), \dots, d_n(\sigma): |\Delta^{n-1}| \to X$$
$$s_0(\sigma), \dots, s_n(\sigma): |\Delta^{n+1}| \to X$$

+ valgono certe relazioni

X spazio topologico, $n \geq 0$

$\rightsquigarrow \mathrm{Sing}_n(X) = n$-simplessi in X

$= \{ |\Delta^n| \to X$ funzioni continue $\}$

$$d_0, \dots, d_n : \mathrm{Sing}_n(X) \to \mathrm{Sing}_{n-1}(X)$$

$\sigma \longmapsto d_0(\sigma), \dots, d_n(\sigma)$

"facce"

$$s_0, \dots, s_n : \mathrm{Sing}_n(X) \longrightarrow \mathrm{Sing}_{n+1}(X)$$

+ alcune relazioni tra $d_0, \dots, d_n$ e $s_0, \dots, s_n$

(identità simpliciali)

$\rightsquigarrow$ La collezione dei $\mathrm{Sing}_n(X)$, con le mappe di <u>faccia</u> e <u>degenerazione</u> soggette alle <u>identità simpliciali</u> è un

<u>INSIEME SIMPLICIALE</u>

(Sing sta per "singolare")

$X \rightsquigarrow \mathrm{Sing}_\bullet(X)$

sp. top. $\quad$ $\boxed{\text{insieme simpliciale}}$

· Un INSIEME SIMPLICIALE è una collezione di insiemi $S_0, \dots, S_n, \dots$

con $d_i : S_n \to S_{n-1}$

$s_i : S_n \to S_{n+1}$ + identità simpliciali

Quanta INFORMAZIONE di X sta in $\mathrm{Sing}(X)$?

↳ Dato un insieme simpliciale S, posso associarci uno spazio?

↳ Qual è l'"essenza" della nozione di spazio?